

Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt 6 (08.12.2006, Abgabe 15.12.2006)

Aufgabe 1 (Gitterverfeinerung)

Betrachten Sie das folgende Gitter mit Knoten $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$, $p_3 = (1, 1)$, $p_4 = (0, 1)$ und $p_5 = (0.8, 0)$, $p_6 = (1, 0.1)$. Konstruiere eine Triangulierung von $\Omega = [0, 1]^2$ mit vier Dreiecken und diesen sechs Knoten. Wählen Sie den Knoten zur Verfeinerung in jedem Dreieck gegenüber der längsten Kante. Markieren Sie immer ein Element und führen Sie die Methode der "nearest neighbor bisection" aus der Vorlesung jeweils so lange durch, bis ein konformes Gitter entsteht. Zeichnen Sie dabei jeden Zwischenschritt, so dass sie vier Folgen von verfeinerten Gittern erhalten.

Aufgabe 2

Seien $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3$ die Knotenbasis von $P_1(\hat{T})$. Berechnen Sie die lokale Steifigkeitsmatrix $\hat{\alpha}_{ij} = \int_{\hat{T}} \nabla \hat{\varphi}_j \nabla \hat{\varphi}_i$ auf dem Referenzelement ($i, j = 1, 2, 3$).

Sei nun T ein beliebiges Dreieck mit Knoten p_1, p_2, p_3 . Berechnen Sie nun die lokale Steifigkeitsmatrix $\alpha_{ij}^T = \int_T \nabla \varphi_j^T \nabla \varphi_i^T$ mit $\varphi_k^T(x) = \hat{\varphi}_k(F_T^{-1}(x))$. Geben Sie dabei die Formeln so an, dass nur die Koordinaten von p_1, p_2, p_3 benötigt werden!

Aufgabe 3

Sei \mathcal{T}_l ein Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und sei

$$V_h := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in C^1(\bar{T}) \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

Zeigen Sie: $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Aufgabe 4 (Kettenregel für Sobolevfunktionen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in H^1(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $f \circ u \in H^1(\Omega)$ und dass es gilt:

$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

Hinweis: Approximiere u durch glatte Funktionen u_n und nutzen Sie aus, dass $f(u_n) \rightarrow f(u)$ fast überall gilt.